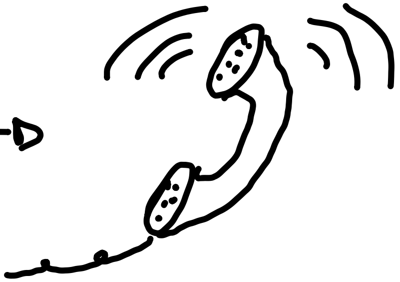
<u>Info</u>: organisation examen blanc de jeudi

R → 

$f : D \to \mathbb{R}$ est

- continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- continue si $\forall x_0 \in D$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Les fonctions usuelles sont continues.

Les combinaisons légales (⚠ division par 0) de fonctions continues sont continues.

⚠ Pour déduire qu'une fonction est continue en x_0 à <u>son expression</u>, il faut que l'expression ne change pas dans un voisinage de x_0

si $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues, $a, x_0 \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ a & \text{si } x = x_0 \end{cases} \to f \text{ continue sur } \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \text{ gratuit}$$

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \leq x_0 \\ h(x) & \text{si } x > x_0 \end{cases} \to f \text{ continue sur } \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \text{ gratuit}$$

Exemple 5.7

(ii) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$\frac{1}{x}$ continue sur $\mathbb{R}^*$, $\sin$ continue sur $\mathbb{R}$, x continue sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f est continue sur $\mathbb{R}^*$

$x_0 = 0$: $\quad \underset{\to 0}{x} \, \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{borné}}$

On a $|f(x)| = |x \cdot \sin(\frac{1}{x})| = |x| \cdot \underbrace{|\sin(\frac{1}{x})|}_{\leq 1} \leq |x|$

Vu que $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$ $\Rightarrow$ f est continue

(iii) Soient $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{bx} & \text{si } x > 0 \\ b & \text{si } x = 0 \\ a + bx^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R}^*$ par combinaison de fonctions continues. En 0 :

Feinte du Bison

$\forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^*, \quad x = \dfrac{x \cdot y}{y}$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} a + bx^2 = a$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(a \cdot x)}{b \cdot x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(a \cdot x)}{b \cdot \frac{ax}{a}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{a}{b} \frac{\sin(ax)}{ax} \overset{a \cdot x = t}{=} \lim_{t \to 0^+} \frac{a}{b} \frac{\sin(t)}{t} = \frac{a}{b}$$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe $\Leftrightarrow$ $a = \dfrac{a}{b}$ $\Leftrightarrow$ $b = 1$.

avec $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = a$

Vu que $f(0) = b = 1$, on doit avoir $a = 1$ pour que f soit continue en 0.

f est continue ssi $a = b = 1$

(iv) $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\chi_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$a_n = \frac{1}{n}$ $\quad \chi_{\mathbb{Q}}(a_n) \to 1$

$b_n = \pi/n$ $\quad \chi_{\mathbb{Q}}(b_n) \to 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \chi_{\mathbb{Q}}$ n'existe pas.

En vrai $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} \chi_{\mathbb{Q}}$ n'existe pas

$0 \cdot \chi_{\mathbb{Q}}$, $\quad x \cdot \chi_{\mathbb{Q}}(x)$, $\quad \sin(x)\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ $\quad \sin(\pi \cdot x)\chi_{\mathbb{Q}}(x)$

$$\begin{cases} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

<u>Définition 5.9</u>: Prolongement par continuité

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert, $f : D \to \mathbb{R}$ continue, $x_0 \in \mathbb{R} \setminus D$

tq f est définie au voisinage de x_0.

Supposons que $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe. Alors, la

fonction $\tilde{f}_{x_0} : D \cup \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{f}_{x_0}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 . \\ \lim_{x \to x_0} f(x) & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$ est continue

et est appelée le <u>prolongement par continuité</u>

<u>de f en x_0</u>

Exemple 5.9

Soit $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\tan(x)}{x}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) / \cos(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1}$$

$$= 1$$

$\Rightarrow \tilde{f}_0 : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{f}_0(x) = \begin{cases} \frac{\tan(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est le prolongement par continuité de f en 0.

Remarque 5.10

Souvent on écrit juste f à $\hat{f}_{x_0}$ pour le prolongement par continuité

Définition 5.11 : (continuité à gauche & à droite)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$

(i) Supposons que f est définie à droite de x_0.

On dit que f est continue à droite en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \text{ , i.e.}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in [x_0, x_0 + \delta[, \ |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

(ii) Supposons que f est définie à gauche de x_0.
On dit que f est <u>continue à gauche en x_0</u> si

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, i-e.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0]$, on a $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

(iii) Supposons que $D = [a,b]$. On dit que f est <u>continue</u> si $\forall x_0 \in]a,b[$, f est continue en x_0, f est continue à droite en a et à gauche en b.

(iv) Supposons que $D = [a, +\infty[$. On dit que est <u>continue</u> si $\forall x_0 \in]a, +\infty[$, f est continue en

x_0 et f est continue à droite en a

(v) Supposons que $D =]-\infty, b]$. On dit que f est <u>continue</u> si $\forall x_0 \in]-\infty, b[$ f est continue en x_0 et f est continue à gauche en b.

<u>Remarque 5.12</u>

f est continue en x_0 ssi f est continue à droite et à gauche en x_0

<u>Exemple 5.13</u>

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$

Montrons que f est continue à droite en 0 :

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Posons $\delta = \varepsilon^2$.

Soit $x \in [0, \delta[$ quelconque. Alors,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \sqrt{x} \leq \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = |\varepsilon| = \varepsilon$$

ce qui montre la continuité à droite en 0.

§5.2 Fonctions continues sur des intervalles

Définition 5.14 $C^0(I)$

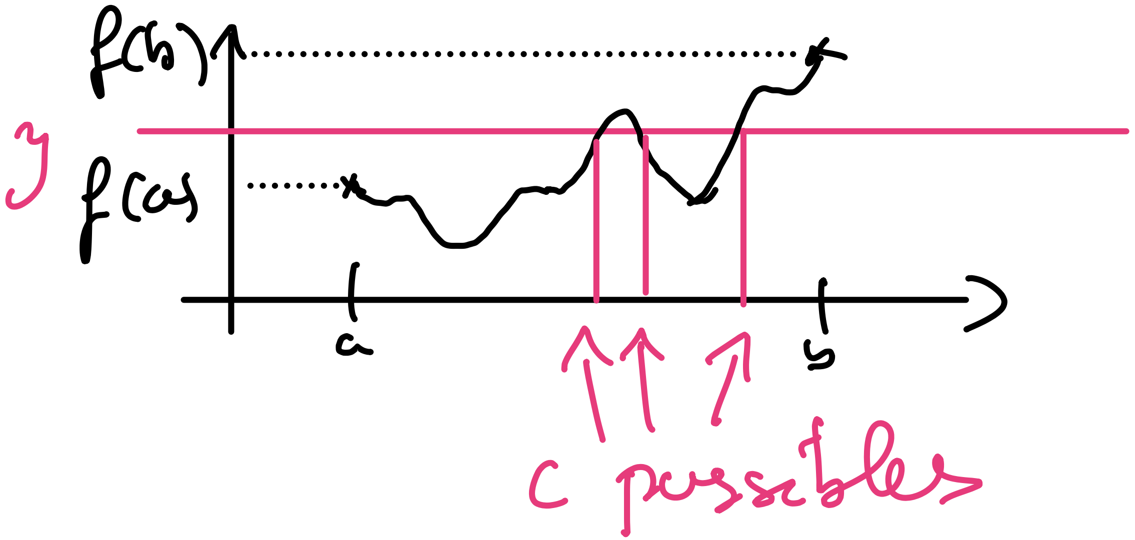
Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle. On note $C^0(I)$ l'espace des fonctions continues sur I

$$C^0(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} : f \text{ est continue} \}$$

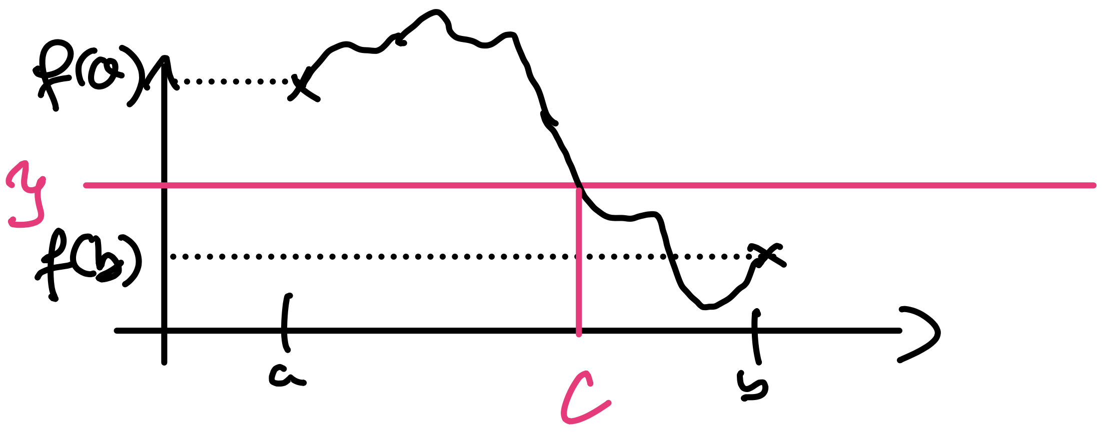
Théorème 5.15 Théorème de la valeur intermédiaire.

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, $f \in C^0(I)$, $a, b \in I$, tq $a < b$.

Alors, $\forall y$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, $\exists c \in [a,b]$ tq $f(c) = y$



$y \in [f(a), f(b)]$



$y \in [f(b), f(a)]$

Définition 5.16 (Fonction qui prend son min & max)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction.

(i) On dit que f <u>prend son maximum</u> sur D si

$$\exists x_0 \in D \text{ tq } \forall x \in D, \quad f(x) \leq f(x_0)$$

On a alors que le suprémum de f est un maximum et on note

$$\max_{x \in D} f(x) = \sup_{x \in D} f(x) = f(x_0)$$

(ii) On dit que f <u>prend son minimum</u> sur D si

$$\exists x_0 \in D \text{ tq } \forall x \in D, \quad f(x) \geq f(x_0)$$

On a alors que l'infimum de f est un minimum et on note $\min_{x \in D} f(x) = \inf_{x \in D} f(x) = f(x_0)$.

Théorème 5.17 (Fonctions continues sur des intervalles)

Soit I un intervalle et $f \in C^0(I)$

(i) L'image de f $f(I)$ est un intervalle

(ii) Si f est strictement monotone, et I est ouvert, $f(I)$ est un intervalle ouvert

$f :]-14, 14[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$

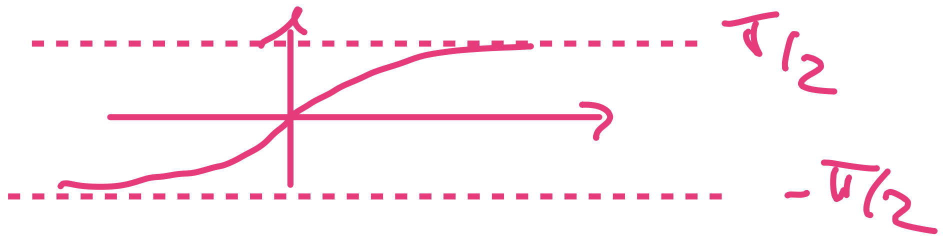
$\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$ fermé

(iii) Si I est fermé borné, $f(I)$ est fermé borné et

$$f(I) = \left[\min_{x \in D} f(x), \max_{x \in D} f(x)\right]$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par $f(x) = \arctan(x)$.

$f(\mathbb{R}) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$



Exemples 5.18

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$

$f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ / Thm (i) ✓

(ii) $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$,

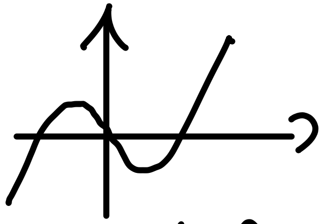
$f(]0, 1[) =]1, +\infty[$ / Thm (i), (ii) ✓

(iii) $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors,

$f(]-1, 1[) = [0, 1[$ / Thm (i) ✓

(iv) Soit $f :]-2, 2[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - x$

$f(]-2,2[) =]-6, 6[$ / thm (i)



(v) Soit $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$

$f([-2,2]) = [0,4]$ / thm (i), (iii)

(vi) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \arctan(x)$

$f(\mathbb{R}) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ / thm (i), (ii)